Von flächenbegleitenden Strecken ausgefegte Rauminhalte

Urban, Herbert

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 45, 1994, S.39-44

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Von flächenbegleitenden Strecken ausgefegte Rauminhalte

Von **Herbert Urban***, München

(Vorgelegt durch Hans Robert Müller und genehmigt durch die Klasse für Mathematik und Naturwissenschaften am 14.10.1994)

Sei $\Psi = X(B) \subset E^3$ $(B \subset \mathbb{R}^2)$ eine reguläre, nabel- und flachpunktfreie C^2-Fläche des euklidischen Raumes. Die normierten Hauptkrümmungsrichtungen r_1 und r_2 bilden zusammen mit dem Einheitsvektor n in Richtung der Flächennormalen ein stetiges Dreibeinfeld von Ψ. Sei h eine im Begleitsystem $\{X;\, r_1, r_2, n\}$ von Ψ feste gerichtete Strecke mit X als Anfangspunkt. Beim Durchlaufen der Fläche Ψ vollführt das Begleitsystem einen flächenläufigen Bewegungsvorgang, bei dem die Strecke h in E^3 einen orientierten Rauminhalt V ausfegt. Es wird gezeigt, daß die Endpunkte der Strecken, die dasselbe Volumen ausfegen, im allgemeinen auf einer Zyklide 3. Ordnung liegen. Wählt man den Endpunkt von h speziell auf der Flächennormalen, so ergibt sich die bekannte Steinersche Formel für das Volumen zwischen zwei Parallelflächen. Neben der Oberfläche und den Hauptkrümmungen der Fläche Ψ gehen in die Formel für den Rauminhalt V die orientierten geodätischen Krümmungen der Krümmungslinien als wesentliche Größen ein.

Zur Einstimmung in das Thema sei zunächst das folgende (hinlänglich bekannte) ebene Problem betrachtet:

Sei $c = X(I) \subset E^2$ eine reguläre, mit ihrer Bogenlänge s parametrisierte C^2-Kurve der euklidischen Ebene. Im weiteren werden Ableitungen nach s mit Strichen bezeichnet. Der Tangenteneinheitsvektor $x' = (x_1' \; x_2')^{\mathrm{T}}$ und der Normaleneinheitsvektor $n = (-x_2' \; x_1')^{\mathrm{T}}$ bestimmen das begleitende Zweibein von c. Bezeichnet $\kappa(s)$ die Krümmung von c, so gelten die Ableitungsgleichungen

$$x'' = \kappa n, \; n' = -\kappa x'. \tag{1}$$

Man betrachte eine im Begleitsystem $\{X;\, x', n\}\,(s)$ von c feste gerichtete Strecke h mit X als Anfangspunkt. Beim Durchlaufen der Kurve c vollführt das Begleitsystem von c einen Zwanglauf, bei dem die Strecke h in E^2 einen *orientierten* Flächeninhalt F ausfegt.[1]) Dabei werden die Flächeninhalte mehrfach ausgefegter Bereiche mehrfach gezählt. Setzt man

$$z(\alpha, s) := x(s) + \alpha w(s);\; \alpha \in [0, 1],\, s \in I,\, w = \lambda x' + \mu n,\, \lambda, \mu = const., \tag{2}$$

[1]) Zu ausgefegten Flächen bei beliebigen ebenen Zwangläufen siehe auch [3], S. 116ff.

* Dr. H. J. Urban · Mathematisches Institut der Technischen Universität München
Arcisstraße 21 · 80290 München

so ergibt sich für F:

$$F = \int\limits_{s \in I} \int\limits_{\alpha=0}^{1} |z_\alpha z_s| \, d\alpha ds = \int\limits_{s \in I} \left(|w x'| + \frac{1}{2} |w w'| \right) ds. \tag{3}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$w' = \lambda x'' + \mu n' = \kappa (\lambda n - \mu x'). \tag{4}$$

Bezeichnet L die Gesamtlänge und Φ die Gesamtkrümmung (also den gesamten Drehwinkel des Begleitsystems) von c, so erhält man

$$F = \frac{\Phi}{2} (\lambda^2 + \mu^2) - L\mu. \tag{5}$$

Ist $\Phi \neq 0$, so liegen die Endpunkte der Strecken, die denselben Flächeninhalt ausfegen, auf konzentrischen Kreisen mit dem (auf der Kurvennormalen von c gelegenen) Steinerpunkt $M_s = [(0, \frac{L}{\Phi})^T]$ als Mittelpunkt. Für eine einfach geschlossene Kurve c ist $\Phi = 2\pi$. Wählt man außerdem den Endpunkt der Strecke h auf der Kurvennormalen ($\lambda = 0$), so ergibt sich die bekannte Steinersche Formel für die Fläche zwischen zwei Parallelkurven[2]) (siehe etwa [1], S. 26):

$$F = \pi\mu^2 - L\mu. \tag{6}$$

Wählt man dagegen den Endpunkt von h auf der Tangente von c ($\mu = 0$), so erhält man

$$F = \pi\lambda^2. \tag{7}$$

Die Aussage von Gleichung (7) läßt sich als entarteter Spezialfall des Satzes von Holditch[3]) auffassen, wenn man die Länge der bewegten Holditch-Sehne gegen 0 streben läßt.

Um die angestellten Überlegungen in den Raum übertragen zu können, muß man einer Fläche des euklidischen Raumes E^3 ein begleitendes Dreibein zuordnen. Dazu werden neben der Normalenrichtung die beiden (zueinander senkrechten) Hauptkrümmungsrichtungen der Fläche verwendet, wobei Nabel- und Flachpunkte auszuschließen sind:

Sei $\Psi = X(B) \subset E^3$ eine reguläre, nabel- und flachpunktfreie C^2-Fläche des euklidischen Raumes mit den Flächenparametern u und v ($(u,v) \in B \subset \mathbb{R}^2$). Die Parameterlinien von Ψ sind gekennzeichnet durch $u = const.$ (v-Linien) bzw. $v = const.$ (u-Linien). Seien x_u und x_v die Tangentenvektoren der Parameterlinien, n der Einheitsvektor in Richtung der Flächennormalen,

$$\mathrm{n} = \frac{x_u \times x_v}{|x_u \times x_v|}, \tag{8}$$

---

2) Üblicherweise beschränkt man sich auf die äußeren Parallelkurven der Eilinien, um Selbstüberschneidungen zu vermeiden. Man beachte außerdem, daß dabei $\mu < 0$ ist, falls c in Richtung positiver Krümmung durchlaufen wird.

3) Siehe etwa [3], S. 120.

g_{ij} die Koeffizienten der 1. Grundform und h_{ij} die Koeffizienten der 2. Grundform von Ψ:

$$g_{11} = x_u^2,\ g_{22} = x_v^2,\ g_{12} = x_u x_v;\ g := g_{11} g_{22} - g_{12}^2\,, \tag{9}$$

$$h_{11} = x_{uu} n,\ h_{22} = x_{vv} n,\ h_{12} = x_{uv} n;\ h := h_{11} h_{22} - h_{12}^2\,. \tag{10}$$

Aufgrund der Nabel- und Flachpunktfreiheit von Ψ läßt sich die Parametrisierung von Ψ so wählen, daß die Parameterlinien mit den Krümmungslinien von Ψ übereinstimmen. Dann gilt

$$g_{12} = h_{12} = 0, \tag{11}$$

und die beiden Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 von Ψ besitzen die einfache Darstellung (siehe [2], S. 113)

$$\kappa_1 = \frac{h_{11}}{g_{11}},\ \kappa_2 = \frac{h_{22}}{g_{22}}\,. \tag{12}$$

Bezeichnen weiter r_1 und r_2 die (zueinander senkrechten) normierten Hauptkrümmungsrichtungen von Ψ,

$$x_u = \sqrt{g_{11}}\ r_1,\ x_v = \sqrt{g_{22}}\ r_2\,, \tag{13}$$

dann stellen die orthonormierten Rechtssysteme $\{r_1, r_2, n\}$ (u,v) ein stetiges begleitendes Dreibeinfeld von Ψ dar. Durch partielle Ableitung der Gleichungen (13) erhält man:

$$\left.\begin{aligned} x_{uu} &= \frac{g_{11,u}}{2\sqrt{g_{11}}}\, r_1 + \sqrt{g_{11}}\ r_{1,u},\ x_{vv} = \frac{g_{22,v}}{2\sqrt{g_{22}}}\, r_2 + \sqrt{g_{22}}\ r_{2,v}\,, \\ x_{uv} &= \frac{g_{11,v}}{2\sqrt{g_{11}}}\, r_1 + \sqrt{g_{11}}\ r_{1,v} = \frac{g_{22,u}}{2\sqrt{g_{22}}}\, r_2 + \sqrt{g_{22}}\ r_{2,u}\,. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Mit (10), (11) und (12) folgt aus (14):

$$r_{1,u} n = \frac{h_{11}}{\sqrt{g_{11}}} = \kappa_1 \sqrt{g_{11}},\ r_{2,v} n = \frac{h_{22}}{\sqrt{g_{22}}} = \kappa_2 \sqrt{g_{22}}, \tag{15}$$

$$r_{1,v} n = -r_1 n_v = 0,\ r_{2,u} n = -r_2 n_u = 0. \tag{16}$$

Sei ds_i das Bogenelement und κ_{ig} die orientierte geodätische Krümmung[4]) der i-ten Krümmungslinie (Parameterlinie) durch einen Punkt von Ψ (i = 1, 2):

$$\dot{s}_1 = \frac{ds_1}{du} = \sqrt{x_u^2} = \sqrt{g_{11}},\ \dot{s}_2 = \frac{ds_2}{dv} = \sqrt{x_v^2} = \sqrt{g_{22}}, \tag{17}$$

$$\kappa_{1g} = \frac{1}{\dot{s}_1^3} \left| x_u\, x_{uu}\, n \right|,\ \kappa_{2g} = \frac{1}{\dot{s}_2^3} \left| x_v\, x_{vv}\, n \right.. \tag{18}$$

Wegen (13), (14) und (17) erhält man für κ_{ig} die Darstellung

$$\left.\begin{aligned} \kappa_{1g} &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \left| r_1\, r_{1,u} n \right| = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\, r_{1,u} r_2 = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\, r_{2,u} r_1, \\ \kappa_{2g} &= \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \left| r_2\, r_{2,v} n \right| = -\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\, r_{2,v} r_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\, r_{1,v} r_2\,. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

---

4) Siehe etwa [2], S. 195f.

Aus (15), (16) und (19) ergeben sich schließlich die Ableitungsgleichungen

$$\boxed{\begin{array}{lllll} r_{1,u} = & (\kappa_{1g} r_2 + \kappa_1 n)\sqrt{g_{11}}, & r_{1,v} = & \kappa_{2g}\sqrt{g_{22}}\, r_2, \\ r_{2,u} = & -\kappa_{1g}\sqrt{g_{11}}\, r_1, & r_{2,v} = & (-\kappa_{2g} r_1 + \kappa_2 n)\sqrt{g_{22}}, \\ n_u = & -\kappa_1\sqrt{g_{11}}\, r_1, & n_v = & -\kappa_2\sqrt{g_{22}}\, r_2. \end{array}} \tag{20}$$

Man betrachte eine im Begleitsystem $\{X;\, r_1,\, r_2,\, n\}\,(u, v)$ von Ψ feste gerichtete Strecke h mit X als Anfangspunkt. Beim Durchlaufen der Fläche Ψ vollführt das Begleitsystem einen flächenläufigen Bewegungsvorgang, bei dem die flächenbegleitende Strecke h in E^3 einen *orientierten* Rauminhalt V ausfegt. Dabei werden die Volumina mehrfach ausgefegter Bereiche mehrfach gezählt. Setzt man

$$\begin{gathered} z\,(\alpha,u,v) := x\,(u,v) + \alpha w\,(u,v);\ \alpha \in [0,1],\, (u,v) \in B, \\ w = \sigma r_1 + \tau r_2 + \rho n, \sigma, \tau, \rho = const., \end{gathered} \tag{21}$$

so ergibt sich für V:

$$\begin{aligned} V = & \iint\limits_{(u,v)\in B} \int\limits_{\alpha=0}^{1} |z_\alpha\, z_u\, z_v|\, d\alpha du dv = \\ & \iint\limits_{(u,v)\in B} \left[\, |w\, x_u\, x_v| + \frac{1}{2}\left(|w\, x_u\, w_v| + |w\, w_u\, x_v|\right) + \frac{1}{3}|w\, w_u\, w_v|\,\right] du dv. \end{aligned} \tag{22}$$

Mittels der Ableitungsgleichungen (20) erhält man für die partiellen Ableitungen w_u und w_v:

$$\left.\begin{aligned} w_u &= \sqrt{g_{11}}\,[(-\tau\kappa_{1g} - \rho\kappa_1)\, r_1 + \sigma\kappa_{1g} r_2 + \sigma\kappa_1 n], \\ w_v &= \sqrt{g_{22}}\,[-\tau\kappa_{2g} r_1 + (\sigma\kappa_{2g} - \rho\kappa_2)\, r_2 + \tau\kappa_2 n]. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Durch Einsetzen von x_u und x_v aus (13), von w aus (21) und von w_u und w_v aus (23) in (22) folgt (g wie in (9)):

$$\begin{aligned} V = \iint\limits_{(u,v)\in B} & \left[\begin{vmatrix} \sigma & 1 & 0 \\ \tau & 0 & 1 \\ \rho & 0 & 0 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \sigma & 1 & -\tau\kappa_{2g} \\ \tau & 0 & \sigma\kappa_{2g} - \rho\kappa_2 \\ \rho & 0 & \tau\kappa_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \sigma & -\tau\kappa_{1g} - \rho\kappa_1 & 0 \\ \tau & \sigma\kappa_{1g} & 1 \\ \rho & \sigma\kappa_1 & 0 \end{vmatrix} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \sigma & -\tau\kappa_{1g} - \rho\kappa_{1g} & -\tau\kappa_{2g} \\ \tau & \sigma\kappa_{1g} & \sigma\kappa_{2g} - \rho\kappa_2 \\ \rho & \sigma\kappa_1 & \tau\kappa_2 \end{vmatrix} \right] \sqrt{g}\, du dv\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Somit erhält man den folgenden Satz:

SATZ 1: Sei $\Psi = X\,(B) \subset E^3$ $(B \subset \mathbb{R}^2)$ *eine reguläre, nabel- und flachpunktfreie* C^2-*Fläche des euklidischen Raumes mit dem Oberflächenelement do, den normierten Hauptkrümmungsrichtungen* r_1 *und* r_2, *dem Normaleneinheitsvektor n und den Hauptkrümmungen* κ_1 *und* κ_2. *Mit* κ_{1g} *und* κ_{2g} *werden die orientierten geodätischen Krümmungen der Krümmungslinien von* Ψ *bezeichnet. Dann gilt für den von einer gerichteten flächen-*

begleitenden Strecke h mit Anfangspunkt $X \in \Psi$ und Endpunkt $Y = [x + \sigma r_1 + \tau r_2 + \rho n]$ in E^3 ausgefegten orientierten Rauminhalt V:

$$\boxed{\begin{aligned} V = \; & \rho O - \frac{1}{2}\tau\rho L_1 + \frac{1}{2}\sigma\rho L_2 - \frac{1}{2}(\sigma^2+\rho^2) M_1 - \frac{1}{2}(\tau^2+\rho^2) M_2 + \\ & + \frac{1}{3}(\sigma^2+\tau^2+\rho^2)(\rho K_1 + \tau K_2 - \sigma K_3); \\ \hline O := \; & \iint_\Psi do;\ L_i := \iint_\Psi \kappa_{ig}\, do,\ M_i := \iint_\Psi \kappa_i\, do,\ i = 1,2; \\ K_1 := \; & \iint_\Psi \kappa_1\kappa_2\, do,\ K_2 := \iint_\Psi \kappa_{1g}\kappa_2\, do,\ K_3 := \iint_\Psi \kappa_{2g}\kappa_1\, do. \end{aligned}} \tag{25}$$

Bemerkungen: 1. In (25) bezeichnet O die Oberfläche und K_1 die Gesamtkrümmung von Ψ.

2. Ist $(K_1, K_2, K_3) \neq (0, 0, 0)$, so liegen die Endpunkte der Strecken, die dasselbe Volumen ausfegen, auf einer Zyklide 3. Ordnung.

3. Wählt man den Endpunkt der Strecke h auf der Flächennormalen ($\sigma = \tau = 0$), so ergibt sich die bekannte Steinersche Formel für das Volumen zwischen zwei Parallelflächen (siehe etwa [1], S. 67):

$$V = \rho O + \rho^2 H + \frac{1}{3}\rho^3 K_1;\ H := -\iint_\Psi \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)\, do. \tag{26}$$

Üblicherweise beschränkt man sich dabei auf die äußeren Parallelflächen der Eiflächen, um Selbstüberschneidungen und Ränder zu vermeiden. Es ist jedoch zu beachten, daß Eiflächen stets Nabelpunkte besitzen (siehe etwa [2], S. 250), so daß – um die Herleitung auch in diesem Fall korrekt durchzuführen – geeignete „Punktierungen" und „Schlitzungen" vorzunehmen sind und überdies sphärische Teilstücke gesondert zu betrachten sind. Bezüglich der Vorzeichen sei vermerkt, daß die Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 einer Eifläche stets negativ sind, sofern der Normaleneinheitsvektor n in das Außengebiet der Eifläche zeigt.

Ist Ψ eine C^3-Fläche, so folgen aus den Ableitungsgleichungen (20) aufgrund der Vertauschbarkeit der zweiten gemischten partiellen Ableitungen von r_1, r_2 und n ($r_{i,uv} = r_{i,vu}$, $i = 1, 2$; $n_{uv} = n_{vu}$) die Integrabilitätsbedingungen:

$$\boxed{\begin{aligned} \kappa_1\kappa_2\sqrt{g} &= (\kappa_{1g}\sqrt{g_{11}})_v - (\kappa_{2g}\sqrt{g_{22}})_u, \\ \kappa_{1g}\kappa_2\sqrt{g} &= \qquad -(\kappa_1\sqrt{g_{11}})_v, \\ \kappa_{2g}\kappa_1\sqrt{g} &= \qquad (\kappa_2\sqrt{g_{22}})_u. \end{aligned}} \tag{27}$$

Mittels des Gaußschen Integralsatzes erhält man aus (27) den

SATZ 2: Sei $\Psi = X(B) \subset E^3$ $(B \subset \mathbb{R}^2)$ *ein reguläres, nabel- und flachpunktfreies, einfach zusammenhängendes und von einer einfach geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Kurve* $c = \partial\Psi$ *berandetes* C^3*-Flächenstück mit dem Oberflächenelement* do *und den Hauptkrümmungen* κ_1 *und* κ_2*. Bezeichnen* ds_1 *und* ds_2 *die Bogenelemente und* κ_{1g} *und* κ_{2g} *die orientierten geodätischen Krümmungen der Krümmungslinien von* Ψ*, so gelten die Integralformeln:*

$$\boxed{\begin{aligned} K_1 &= \iint_\Psi \kappa_1\kappa_2 do &&= -\oint_c (\kappa_{1g}ds_1 + \kappa_{2g}ds_2), \\ K_2 &= \iint_\Psi \kappa_{1g}\kappa_2 do &&= \oint_c \kappa_1 ds_1, \\ K_3 &= \iint_\Psi \kappa_{2g}\kappa_1 do &&= \oint_c \kappa_2 ds_2, \end{aligned}} \tag{28}$$

Ist die Randkurve c *eine* C^2*-Kurve mit dem Bogenelement* ds *und der orientierten geodätischen Krümmung* κ_g*, so folgt aus der Darstellung der Gesamtkrümmung* K_1 *in* (28) *mittels der Integralformel von Gauß-Bonnet:*

$$\oint_c (\kappa_g ds - \kappa_{1g}ds_1 - \kappa_{2g}ds_2) = 2\pi\,. \tag{29}$$

Bemerkung 4: Man betrachte die in Satz 1 angegebene Situation. Ist Ψ eine orientierbare geschlossene C^3-Fläche, so besitzt Ψ notwendigerweise das Geschlecht $p = 1$, da andernfalls stets Nabel- oder Flachpunkte auftreten (siehe etwa [2], S. 250). Aufgrund der Formeln (28) erkennt man (etwa mittels einer Triangulation von Ψ), daß in diesem Fall nicht nur die Gesamtkrümmung K_1, sondern auch K_2 und K_3 verschwinden. Die Endpunkte der flächenbegleitenden Strecken h, die dasselbe Volumen ausfegen, liegen nun – anders als im allgemeinen Fall (siehe Bemerkung 2.) – auf einer Quadrik. Dies steht in Übereinstimmung mit dem von H.R. Müller in [5], S. 45 angegebenen Satz 1.

Literatur

[1] Blaschke, W.: Vorlesungen über Integralgeometrie, 3. Auflage, Berlin (1955).
[2] Blaschke, W./Leichtweiß, K.: Elementare Differentialgeometrie, 5. Auflage, Berlin – Heidelberg – New York (1973).
[3] Blaschke, W./Müller, H.R.: Ebene Kinematik, München (1956).
[4] Cartan, H.: Differentialformen, Mannheim – Wien – Zürich (1974)
[5] Müller, H.R.: Über den Rauminhalt kinematisch erzeugter, geschlossener Flächen, Arch. Math., Vol. 38, 43–49 (1982).
[6] Stoker, J.J.: Differential Geometry, New York – London – Sydney – Toronto (1969).